向量

Didnelpsun

目录

1 线性相关性

使用行列式不等于 0 的方法最方便，但是有时候行列不同就不能这么做了。

1.1 初等运算

多用于选择题，给出 n 维线性无关向量，判断向量组是否线性无关。如果向量组初等运算为 0 就代表线性相关。

例题：已知 n 维向量 α_1，α_2，α_3 线性无关，则判断线性相关性：$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$。

解：$\alpha_1+\alpha_2$ 与 $\alpha_2-\alpha_3$，共同出现了 α_2，首先要消掉 α_2，所以相减得到 $\alpha_1+\alpha_3$，然后发现跟后面的 $\alpha_3+\alpha_1$ 一样，所以直接一减得到 0，表示线性相关。

1.2 定义法

基本是证明题，若证明 α、β 线性无关，则令 $k_1\alpha+k_2\beta=0$，判断 k_i 的值，如果只有零解则代表 k 矩阵为满秩，从而线性无关。

1.2.1 代入重组

若要求线性相关的式子由其他向量构成，则将式子代入表示目标式子。

例题：设 α_1，α_2，β_1，β_2，β_3 都是 n 维向量，$n\geqslant 3$，且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_1-2\alpha_2$，$\beta_3=3\alpha+1+2\alpha_2$，证明向量组 β_1，β_2，β_3 线性相关。

证明：若存在 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$。

代入 α 表示 β 的式子：$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-2\alpha_2)+k_3(3\alpha_1+2\alpha_2)=0$。

$\therefore (k_1+k_2+3k_3)\alpha_1+(k_1-2k_2+2k_3)\alpha_2=0$。

$\therefore k_1+k_2+3k_3=0$，且 $k_1-2k_2+2k_3=0$ 即可。

而未知数的个数大于方程个数，所以有无穷多解，从而必然有非零解，从而 β_1，β_2，β_3 线性相关。

1.2.2 同乘

若要求线性相关的式子存在一定的乘积关系，则可以用同乘一步步消去系数。

例题：设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使得线性方程组 $A^kx=0$ 有解向量 α，且 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，证明向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

证明：假设 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性相关，则设存在系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 使得 $\lambda_1\alpha + \lambda_2 A\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$。

$\because A^k x = 0$ 的解为 α，$\therefore A^k\alpha = 0$，$\therefore \cdots = A^{k+2}\alpha = A^{k+1}\alpha = A^k\alpha = 0$。

左乘 A^{k-1}，得到 $\lambda_1 A^{k-1}\alpha + \lambda_2 A^k\alpha + \cdots + \lambda_k A^{2k-2}\alpha = \lambda_1 A^{k-1}\alpha = 0$。

$\because A^{k-1}\alpha \neq 0$，$\therefore \lambda_1 = 0$，消去 λ_1：$\lambda_2 A\alpha + \lambda_3 A^2\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$。

左乘 A^{k-2}，得到 $\lambda_2 A^{k-1}\alpha + \lambda_3 A^k\alpha + \cdots + \lambda_k A^{2k-3}\alpha = \lambda_2 A^{k-1}\alpha = 0$。

$\because A^{k-1}\alpha \neq 0$，$\therefore \lambda_2 = 0$，消去 λ_2：$\lambda_3 A^2\alpha + \lambda_4 A^3\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$。

同理依次左乘 A^n，所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$，所以 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

1.3 行列式

对向量的线性相关性可以从其向量组组成的行列式来计算，若行列式值为 0 则线性相关，若行列式值不为 0 则线性无关。

注意这里容易失根。要仔细找出所有为 0 的因式，不要随便降低阶数。

例题： 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 是 s 个互不相同的数，探究 s 个 n 维列向量 $\alpha_i = [1, a_i, a_i^a, \cdots, a_i^{n-1}]^T$（$i = 1, 2, \cdots, s$）的线性相关性。

解：当 $s > n$ 时，有 n 个方程 s 个未知数，所以必然存在自由变量，从而必然线性相关性。

当 $s = n$ 时，$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (a_i - a_j) \neq 0$。

所以线性无关。

当 $s < n$ 时，对方程矩阵切割保留方形的 s 个 $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$，

上面因为范德蒙德行列式已经不等于 0，即上面的方阵线性无关，原来无关延长无关，所以整个方程都线性无关。

综上当 $s > n$ 时线性相关，$s \leqslant n$ 时线性无关。

1.4 矩阵秩

当向量的个数与维数不同时就不能使用行列式去分析，而只能用矩阵的秩来分析。当矩阵满秩则线性无关，当矩阵降秩则线性相关。

当谈到多个向量是否线性相关时可以将向量组组成矩阵，判断其秩。满秩就是线性无关，降秩就是线性相关。

当谈到一个向量是否能被其他向量线性表出时，要将这些向量全部组成一起，判断能否被其他向量表出的向量放在最右边，然后判断增广矩阵的秩。

1. 若 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\beta)$，则 β 无法被 α 线性表出。
2. 若 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\beta)<r$，则 β 可以被 α 无穷线性表出。表达式为基础解系。
3. 若 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\beta)=r$，则 β 可以被 α 惟一线性表出。表达式为将矩阵化为单位矩阵后 β 所在就是 α 的系数。

例题：已知 $\alpha_1=(1,2,1)^T$，$\alpha_2(2,3,a)^T$，$\alpha_3=(1,a+2,-2)^T$，$\beta=(1,3,0)^T$，若 β 可以由 α_1、α_2，α_3 线性表示，且表示法不唯一，求 a。

解：设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_2\alpha_3=\beta$，由 β 可以由 α_1、α_2，α_3 线性表示，且表示法不唯一可知 $Ax=\beta$ 有无穷解，即 $r(A)=r(A|B)<3$。

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta]=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{bmatrix}。$$

$\therefore a=3$。

2 线性表出

2.1 极大线性无关组

极大线性无关组一般与向量组秩在一起使用。一般解出极大线性无关组与秩，还要用极大线性无关组表示出其余的向量，基本步骤：

1. 将向量组拼接为矩阵 A，对 A 进行初等行变换，化为最简行阶梯形矩阵，确定矩阵秩 $r(A)$。

2. 在最简行阶梯矩阵中按列找出一个秩为 $r(A)$ 的子矩阵，即在每个台阶上找一列列向量，找 $r(A)$ 列构成一个新矩阵，其就是一个极大线性无关组。

3. 将其余向量依次与极大线性无关组进行对比解出表示方法。

注意：求向量组的秩可以进行初等变换，包括行变换和列变换。但是求极大线性无关组时最好只使用行变换，因为列变换会改变方程的解。从而解方程组只能做行变换。

2.2 向量组线性标出

若对于多个向量组成的向量组 B 是否能线性表出向量组 A（而不是单个向量 α），把 A 和 B 合并，则若合并后的向量组 C 的秩大于 B 的，那么向量组 B 不能线性表示向量组 A。

解决方法跟单个向量表出一样，将 B 和 A 合并为增广矩阵，然后进出行变换。

也给出这样的结论，若 B 自身线性相关，则无法线性表出其他矩阵。

例题：设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$、$\alpha_2=(0,1,1)^T$、$\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$、$\beta_2=(1,2,3)^T$、$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示，求 a。

解：已知题目，则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 线性相关。

对其行变换，解得 $a=5$。

2.3 向量线性表示

即要求 β 关于 α_i 的线性表出表达式。

基本方法是设 $\beta=a\alpha_1+b\alpha_2+\cdots$，然后每行代入求出，不过也可以使用矩阵变换法。

可以同时求多个 β 的表示方式，设 α_i 为长度为 h 的列向量，一共有 n 个，组成 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，设 β_i 为长度为 h 的列向量，一共有 n 个，组成 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$。

$[A|B]$ 通过线性变换得到 $[E|C]$，则 $B=CA$。

例题：用 $\alpha_1=(1,1,1)^T$、$\alpha_2=(1,2,4)^T$、$\alpha_3=(1,3,9)^T$ 表示 $\beta=(1,1,3)^T$。

解：组成矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，所以 $\beta=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$。

3 等价向量组

$r(A)=r(B)=r(A|B)$，所以需要计算三个向量组构成的矩阵的秩就可以了。

例题：设向量组 α：$\alpha_1=[1,0,2]^T$，$\alpha_2=[0,1,1]^T$，$\alpha_3=[2,-1,a+4]^T$，向量组 β：$\beta_1=[1,2,4]^T$，$\beta_2=[1,-1,a+2]^T$，$\beta_3=[3,3,10]^T$。

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\2&1&a+4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&-1&3\\4&a+2&10\end{pmatrix}$。

(1)AB 是否等价。

(2) 向量组 AB 是否等价。

(1) 解：化简 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&1\\0&0&a\end{pmatrix}$

若 $a\neq-1$，则 $r(A)=3$，且 $a\neq0$，则 $r(B)=3$，此时 AB 等价。

若 $a=-1$，则 $r(A)=2$，$r(B)=3$，AB 不等价。

若 $a=0$，则 $r(B)=2$，$r(A)=2$，AB 不等价。

(2) 解：因为向量组 α 拼接在一起就是 A，β 拼接在一起就是 B，所以 $r(\alpha)=r(A)$，$r(\beta)=r(B)$，$r(\alpha|\beta)=r(A|B)$。

将 AB 拼在一起做行变换，得到 $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&3\\0&1&-1&2&-1&3\\0&0&a+1&0&a+1&1\end{array}\right)$。

若 $a\neq-1\neq0$，则 $r(A)=r(B)=r(A|B)$。向量组等价。

若 $a=-1$ 或 $a=0$，则 $r(A)\neq r(B)$，所以不等价。

4 向量空间

4.1 基坐标

对于任意向量 $\alpha=\xi_ix_i=\eta_iy_i$，$\xi_i$、$\eta_i$ 为基，x_i、y_i 为向量基 ξ_i、η_i 下的坐标。

4.2 过渡矩阵

对于两个基 η_i、ξ_i，$\eta_i = \xi_i C$ 的 C 为 ξ_i 到 η_i 的过渡矩阵，该式子为基变换公式。

所以得到 $x = Cy$，这个公式为坐标变换公式。