向量

Didnelpsun

目录

1　线性相关性

使用行列式不等于 0 的方法最方便，但是有时候行列不同就不能这么做了。

1.1　初等运算

多用于选择题，给出 n 维线性无关向量，判断向量组是否线性无关。如果向量组初等运算为 0 就代表线性相关。

例题：已知 n 维向量 α_1，α_2，α_3 线性无关，则判断线性相关性：$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$。

解：$\alpha_1+\alpha_2$ 与 $\alpha_2-\alpha_3$，共同出现了 α_2，首先要消掉 α_2，所以相减得到 $\alpha_1+\alpha_3$，然后发现跟后面的 $\alpha_3+\alpha_1$ 一样，所以直接一减得到 0，表示线性相关。

1.2　代入重组

若要求线性相关的式子由其他向量构成，则将式子代入表示目标式子。

例题：设 α_1，α_2，β_1，β_2，β_3 都是 n 维向量，$n\geqslant 3$，且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_1-2\alpha_2$，$\beta_3=3\alpha+1+2\alpha_2$，证明向量组 β_1，β_2，β_3 线性相关。

证明：若存在 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$。

代入 α 表示 β 的式子：$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-2\alpha_2)+k_3(3\alpha_1+2\alpha_2)=0$。

$\therefore (k_1+k_2+3k_3)\alpha_1+(k_1-2k_2+2k_3)\alpha_2=0$。

$\therefore k_1+k_2+3k_3=0$，且 $k_1-2k_2+2k_3=0$ 即可。

而未知数的个数大于方程个数，所以有无穷多解，从而必然有非零解，从而 β_1，β_2，β_3 线性相关。

1.3　同乘

若要求线性相关的式子存在一定的乘积关系，则可以用同乘一步步消去系数。

例题：设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使得线性方程组 $A^kx=0$ 有解向量 α，且 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，证明向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

证明：假设 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性相关，则设存在系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 使得 $\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$。

$\because A^kx=0$ 的解为 α，$\therefore A^k\alpha=0$，$\therefore\cdots=A^{k+2}\alpha=A^{k+1}\alpha=A^k\alpha=0$。

左乘 A^{k-1}，得到 $\lambda_1 A^{k-1}\alpha+\lambda_2 A^k\alpha+\cdots+\lambda_k A^{2k-2}\alpha=\lambda_1 A^{k-1}\alpha=0$。

$\because A^{k-1}\alpha\neq 0$，$\therefore \lambda_1=0$，消去 λ_1：$\lambda_2 A\alpha+\lambda_3 A^2\alpha+\cdots+\lambda_k A^{k-1}\alpha=0$。

左乘 A^{k-2}，得到 $\lambda_2 A^{k-1}\alpha+\lambda_3 A^k\alpha+\cdots+\lambda_k A^{2k-3}\alpha=\lambda_2 A^{k-1}\alpha=0$。

$\because A^{k-1}\alpha\neq 0$，$\therefore \lambda_2=0$，消去 λ_2：$\lambda_3 A^2\alpha+\lambda_4 A^3\alpha+\cdots+\lambda_k A^{k-1}\alpha=0$。

同理依次左乘 A^n，所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$，所以 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

1.4 行列式

对向量的线性相关性可以从其向量组组成的行列式来计算，若行列式值为 0 则线性相关，若行列式值不为 0 则线性无关。

注意这里容易失根。要仔细找出所有为 0 的因式，不要随便降低阶数。

例题：设 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 是 s 个互不相同的数，探究 s 个 n 维列向量 $\alpha_i=[1,a_i,a_i^a,\cdots,a_i^{n-1}]^T$（$i=1,2,\cdots,s$）的线性相关性。

解：当 $s>n$ 时，有 n 个方程 s 个未知数，所以必然存在自由变量，从而必然线性相关性。

当 $s=n$ 时，$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0$。

所以线性无关。

当 $s<n$ 时，对方程矩阵切割保留方形的 s 个 $=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{vmatrix}$，

上面因为范德蒙德行列式已经不等于 0，即上面的方阵线性无关，原来无关延长无关，所以整个方程都线性无关。

综上当 $s>n$ 时线性相关，$s\leqslant n$ 时线性无关。

1.5 矩阵秩

当向量的个数与维数不同时就不能使用行列式去分析，而只能用矩阵的秩来分析。当矩阵满秩则线性无关，当矩阵降秩则线性相关。

1.5.1 线性相关性

当谈到多个向量是否线性相关时可以将向量组组成矩阵，判断其秩。满秩就是线性无关，降秩就是线性相关。

1.5.2 线性表出

当谈到一个向量是否能被其他向量线性表出时，要将这些向量全部组成一起，判断能否被其他向量表出的向量放在最右边，然后判断增广矩阵的秩。

1. 若 $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \beta)$，则 β 无法被 α 线性表出。

2. 若 $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \beta) < r$，则 β 可以被 α 无穷线性表出。表达式为基础解系。

3. 若 $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \beta) = r$，则 β 可以被 α 惟一线性表出。表达式为将矩阵化为单位矩阵后 β 所在就是 α 的系数。

例题：已知 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$，$\alpha_2(2, 3, a)^T$，$\alpha_3 = (1, a+2, -2)^T$，$\beta = (1, 3, 0)^T$，若 β 可以由 α_1、α_2，α_3 线性表示，且表示法不唯一，求 a。

解：设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_2\alpha_3 = \beta$，由 β 可以由 α_1、α_2，α_3 线性表示，且表示法不唯一可知 $Ax = \beta$ 有无穷解，即 $r(A) = r(A|B) < 3$。

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & a-3 \end{bmatrix}。$$

$\therefore a = 3$。

1.6 极大线性无关组

极大线性无关组一般与向量组秩在一起使用。一般解出极大线性无关组与秩，还要用极大线性无关组表示出其余的向量，基本步骤：

1. 将向量组拼接为矩阵 A，对 A 进行初等行变换，化为最简行阶梯形矩阵，确定矩阵秩 $r(A)$。

2. 在最简行阶梯矩阵中按列找出一个秩为 $r(A)$ 的子矩阵，即在每个台阶上找一列列向量，找 $r(A)$ 列构成一个新矩阵，其就是一个极大线性无关组。

3. 将其余向量依次与极大线性无关组进行对比解出表示方法。

注意：求向量组的秩可以进行初等变换，包括行变换和列变换。但是求极大线性无关组时最好只使用行变换，因为列变换会改变方程的解。从而解方程组只能做行变换。

2 等价向量组

$r(A)=r(B)=r(A|B)$，所以需要计算三个向量组构成的矩阵的秩就可以了。

例题：设向量组 α：$\alpha_1=[1,0,2]^T$，$\alpha_2=[0,1,1]^T$，$\alpha_3=[2,-1,a+4]^T$，向量组 β：$\beta_1=[1,2,4]^T$，$\beta_2=[1,-1,a+2]^T$，$\beta_3=[3,3,10]^T$。

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\2&1&a+4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&-1&3\\4&a+2&10\end{pmatrix}$。

(1)AB 是否等价。

(2) 向量组 AB 是否等价。

(1) 解：化简 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&1\\0&0&a\end{pmatrix}$

若 $a\neq-1$，则 $r(A)=3$，且 $a\neq0$，则 $r(B)=3$，此时 AB 等价。

若 $a=-1$，则 $r(A)=2$，$r(B)=3$，AB 不等价。

若 $a=0$，则 $r(B)=2$，$r(A)=2$，AB 不等价。

(2) 解：因为向量组 α 拼接在一起就是 A，β 拼接在一起就是 B，所以 $r(\alpha)=r(A)$，$r(\beta)=r(B)$，$r(\alpha|\beta)=r(A|B)$。

将 AB 拼在一起做行变换，得到 $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&3\\0&1&-1&2&-1&3\\0&0&a+1&0&a+1&1\end{array}\right)$。

若 $a\neq-1\neq0$，则 $r(A)=r(B)=r(A|B)$。向量组等价。

若 $a=-1$ 或 $a=0$，则 $r(A)\neq r(B)$，所以不等价。

3 向量空间

3.1 基坐标

对于任意向量 $\alpha = \xi_i x_i = \eta_i y_i$，$\xi_i$、$\eta_i$ 为基，x_i、y_i 为向量基 ξ_i、η_i 下的坐标。

3.2 过渡矩阵

对于两个基 η_i、ξ_i，$\eta_i = \xi_i C$ 的 C 为 ξ_i 到 η_i 的过渡矩阵，该式子为基变换公式。

所以得到 $x = Cy$，这个公式为坐标变换公式。