向量

Didnelpsun

目录

线性代数的主要研究对象就是向量，行列式与矩阵都是由向量组成的向量组。

1　向量与向量组

1.1　向量的定义与运算

n 维向量定义：n 个数构成的一个有序数组 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为一个 n 维向量，记为 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$，并称 α 为 n 维行向量，α^T 为 n 维列向量，a_i 为向量 α 的 i 个分量。

若 α 与 β 都是 n 维向量，且对应元素相等，则 $\alpha = \beta$。

$\alpha + \beta = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n]$。

$k\alpha = [ka_1, ka_2, \cdots, ka_3]$。

1.2　向量组的线性概念

线性组合定义：m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 以及 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，则向量 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$ 就是向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的线性组合。

线性表出定义：若向量 β 能表示成向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合，则存在 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$，则成向量 β 能被向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性表出。否则不能被线性表出。

线性相关定义：对 m 个 n 维向量 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$，则称 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关。

含有零向量或成比例向量的向量组必然线性相关。

线性无关定义：对 m 个 n 维向量 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，不存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$，即仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 才成立，则称 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性无关。

两个非零向量，不成比例向量的向量必然线性无关。

1.3　线性相关性

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$（$n \geqslant 2$）线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量可由其他 $n-1$ 个向量线性表出。若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充要

条件是向量组的任何一个向量都不能被其他 $n-1$ 个向量线性表出。

2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，而 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，且表示方法唯一。

3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，且 $n>s$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关。（以少表多，多的相关）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 $n\leqslant s$。

4. 设 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，其中 $\alpha_1=[a_{11},a_{12},\cdots,a_{m1}]^T$，$\cdots$，$\alpha_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{mm}]^T$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件是齐次线性方程 $Ax=0$ 有非零解，其中 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$，$x=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^T$。$m$ 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是齐次线性方程 $Ax=0$ 只有零解。

5. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 表出，则向量组 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n][x_1,x_2,\cdots,x_n]^T=\beta$ 有解，即 $r([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n])=r([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta])$。否则则不能表出，则方程无解，$r([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n])+1=r([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta])$

6. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 存在一部分向量线性相关，则整个向量组线性相关。若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则任意一部分向量组线性无关。

7. 设 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则把这些向量中每个各任意添加 s 个分量所得到的新向量组（$n+s$ 维）$\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_m^*$ 也是线性无关的；如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则每个各去掉相同的若干分量得到的新向量组也线性相关。（原来无关延长无关，原来相关缩短相关）

2 极大线性无关组

2.1 概念

极大线性无关组**定义：**在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中，若存在部分 $a_i,a_j,\cdots,a_k$ 满足：①$a_i,a_j,\cdots,a_k$ 线性无关；②向量组中任一向量 a_s（$i=1,2,\cdots,n$）均可由 $a_i,a_j,\cdots,a_k$ 线性表出，则称向量组 $a_i,a_j,\cdots,a_k$ 为原向量组的极大线性无关组。

不包含无用约束方程的最简方程组的系数矩阵就是极大线性无关组。

向量组的极大线性无关组一般不唯一，只由一个零向量组成的向量组不存在极大线性无关组，一个线性无关向量组的极大线性无关组就是其本身。

3 向量组秩

向量组构成矩阵的秩等于行向量组的秩等于列向量组的秩。

若 A 通过初等行变换为 B，则 AB 的行向量组是等价向量组，任何对应的部分列向量组都具有同样的线性相关性。

若向量组 B 均可由 A 线性表出，则 $r(B) \leqslant r(A)$。

4 等价向量组

任何一个组都可以由其极大线性无关组来代表。

4.1 定义

设两个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$，若这两个向量组可以互相线性表出，则称其为等价向量组，记为 $\alpha \cong \beta$。

具有的性质：

1. $A \cong A$（反身性）。
2. $A \cong B$，则 $B \cong A$（对称性）。
3. $A \cong B$，$B \cong C$，则 $A \cong C$（传递性）。

向量组和其极大线性无关组是等价向量组。

4.2 判定

若 $r(A) = r(B) = r(A|B)$，则向量组等价。

4.3 与等价矩阵区别

对于矩阵而言，若 $A \cong B$，则 AB 同型且 $r(A) = r(B)$。

对于向量组而言，若 $A \cong B$，则 AB 同维（行数相同）且 $r(A) = r(B) = r(A|B)$。

5 向量空间

5.1 基本概念

若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 R^n 中的线性无关的有序向量组，则任意向量 $\alpha \in R^n$ 均可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表出，记为 $\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$，类似一个极大线性无关组，则称有序向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 为 R^n 的一个**基**，基向量的个数 n 为向量空间的**维数**，而 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]([a_1, a_2, \cdots, a_n]^T)$ 为向量 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的**坐标**，或称为 α 的坐标行列向量。

5.2 基变换与坐标变换

若 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 和 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 R^n 中两个基，且有关系：$[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]C_{n\times n}$，则这个式子称为基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的**基变换公式**，矩阵 C 就是基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的**过渡矩阵**，C 可逆，C 的第 i 列就是 η_i 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的坐标列向量。

α 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下坐标分别为 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$，$y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$，即 $\alpha = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]x = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]y$。又 C 是基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵，则 $[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]C$，则 $\alpha = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]x = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]y = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]Cy$，从而 $x = Cy$ 或 $y = C^{-1}x$，这个就是**坐标变换公式**。