函数

Didnelpsun

目录

1 函数连续性

1.1 连续

连续则极限值等于函数值。

1.1.1 求连续区间

若要考察一个函数的连续区间，必须要了解函数的所有部分，一般会给出分段函数，所以要了解分段函数的每段函数的性质。

对于函数 $f(x)$ 是个极限表达形式，我们要简化这个极限，最好得到一个 x 的表达式，从而才能判断其连续区间。

例题：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$，求函数连续区间。

解：注意到函数的形式为一个极限值，其极限趋向的变量为 n（$n\to\infty$ 指 $n\to+\infty$）。所以在该极限式子中将 x 当作类似 t 的常数。

需要先求出极限形式的 $f(x)$，而 x 变量的取值会影响到极限，且求的就是 x 的取值范围。所以将其分为三段：

当 $x<0$ 时，$nx\to-\infty$，$\therefore e^{nx}\to 0$，x^2 在这个极限式子为一个常数，$\therefore x^2e^{nx}\to 0$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=\dfrac{x+0}{1+0}=x$。

当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=\dfrac{0}{2}=0$。

当 $x>0$ 时，e^{nx} 在 $n\to\infty$ 时为 ∞，上下都有这个无穷大的因子，所以上下都除以 e^{nx}，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{xe^{-nx}+x^2}{1+e^{-nx}}=\dfrac{0+x^2}{1}=x^2$。

从而得到了 $f(x)$ 关于 x 的表达式：

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=f(0)=0$。

$f(x)$ 在 R 上连续。

1.1.2 已知连续区间求参数

一般会给出带有参数的分段函数，要计算参数就必须了解连续区间与函数之间的关系。

例题：$f(x)=\begin{cases}6, & x\leqslant 0\\ \dfrac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x<1\\ e^{bx}+1, & x\geqslant 1\end{cases}$，

若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，则求 a,b。

解：已知 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，但是不能判断 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的连续性。所以分开讨论。

对于 $f(x)$ 因为左侧为常数函数，所以若是 $f(x)$ 连续，则必然：

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}=6$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}$

令$t=\arcsin x\Rightarrow=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\sin^3 t}{\sin t-t}=a\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{t^3}{\sin t-t}=a\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3t^2}{\cos t-1}$

$=-6a=6$。

$\therefore a=-1$ 时 $f(x)$ 在 R 上连续。

对于 $g(x)$，当 $x<1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{3\sin t}{t}=3$。

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+}e^{bx}+1=e^b+1=3$。

$\therefore b=\ln 2$ 时 $g(x)$ 在 R 上连续。

$\therefore a=-1,b=\ln 2$ 时 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续。而 $a\neq -1$ 时 $f(x)+g(x)$ 在 $x=0$ 时不连续，$b\neq\ln 2$ 时 $f(x)+g(x)$ 在 $x=1$ 时不连续。

1.2 间断

1.2.1 求间断点

求间断点需要首先分析函数的表达形式。

例题：设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，求其间断点并分析其类型。

解：根据函数形式，我们需要首先回顾一下幂函数的性质，幂函数的变化趋势取决于底数。

当 $x=1$ 时，$x^n\equiv 1$，当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，当 $n\to\infty$ 时，$x^n\to\infty$，而 $x\in(-1,1)$ 时，当 $n\to\infty$ 时，$x^n\to 0$。

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)\\ 1, & x=1\\ x+1, & x\in(-1,1)\end{cases}$$

所以分段点为 $x=\pm 1$。

当 $x=-1$ 时，$f(-1^+)=f(-1^-)=f(-1)=0$，所以在此处连续。

当 $x=1$ 时，$f(1^+)=0\neq f(1^-)=2$，所以在此处简短，为跳跃间断点。

1.2.2 已知间断点求参数

这种题目已知间断点，而未知式子中的参数，只用将间断点代入式子并利用极限计算间断点的类型就可以了。

例题： $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 有无穷间断点 $x=e$，可去间断点 $x=1$，求 ab 的值。

解：已知有两个间断点 $x=a,x=b$，其中无穷间断点指极限值为无穷的点，可去间断点表示极限值存在且两侧相等，但是与函数值不相等的点。

已经给出两个间断点的值为 $x=1$ 和 $x=e$，所以 ab 必然对应其中一个，但是不清楚到底谁是谁。

当 $a=1,b=e$ 时，$f(x)=\dfrac{e^x-e}{(x-1)(x-e)}$。

当 $x\to 1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{(x-1)(x-e)}=\dfrac{1}{1-e}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}=\dfrac{e}{1-e}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}=\dfrac{e}{1-e}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{e}{1-e}$。

$\therefore x=1$ 为可去间断点。

当 $x\to e$ 时，$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x-e}{(x-1)(x-e)}=\dfrac{1}{e-1}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x-e}{x-e}=\dfrac{e}{e-1}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-e}=\dfrac{e}{e-1}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x-1}{x-e}=\dfrac{e(e-1)}{e-1}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{1}{x-e}=\infty$。

$\therefore x=e$ 为无穷间断点。

当 $a=e,b=1$ 时，$f(x)=\dfrac{e^x-1}{(x-e)(x-1)}$。

而作为分子的 e^x-1 必然为一个常数，当式子趋向 1 或 e 的时候分母两个不等式中的一个不等式必然为一个常数，从而另一个不等式则变为了无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to e}f(x)=\infty$。

$\therefore a=1,b=e$。

2 中值定理

中值定理一般用于判断不等式。

2.1 罗尔定理

罗尔定理在判断不等式时一般用于零点的状况。

2.1.1 直接式子

需要证明所给式子的导数是否在该区间为 0 即可。

例题：证明多项式 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点。

证明：假设 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0,1]$ 有两个零点 x_1 和 x_2，其中 $x_1 < x_2$。

因为 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0,1]$ 内连续，所以 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0,1]$ 内可导。

由罗尔定理得知 $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (0,1)$，使得 $f'(\xi) = 0$，但是 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 在 $(0,1)$ 上不超过 0，所以 ξ 不存在，从而多项式 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点。

2.1.2 含参数式子

若所求式子是一个含参数，那么其一定还有另一个式子约束参数，此时我们就需要构建一个新的式子来利用所给的条件，然后将新式子转换为旧式子。

例题：设 $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n+1} = 0$，证明多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 在 $(0,1)$ 中至少有一个零点。

证明：因为所要证明零点，所以一定使用罗尔定理。所给出的约束参数式子 $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n+1} = 0$ 与所求 $f(x)$ 之间存在一个关系。

设 $F(x) = a_0 x + a_1 \dfrac{x^2}{2} + \cdots + a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$，$F'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = f(x)$。

又 $F(0) = 0, F(1) = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n+1} = 0$，又罗尔定理一定存在一个 $\xi \in (0,1)$，使得 $F'(\xi) = f(\xi) = 0$。

从而 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 在 $(0,1)$ 中至少有一个零点。

2.2 拉格朗日中值定理

证明不等式最重要的还是找到 $f(x)$，有时候不等式不存在 $f(a) - f(b)$ 这种式子，就需要我们转换。

2.2.1 对数函数特性

对于对数函数，要记住其特定的性质：$\log_n(\dfrac{a}{b}) = \log_n a - \log_n b$。

例题：设 $a>b>0$，证明：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$。

证明：因为 $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$，所以令 $f(x)=\ln x$。

所以根据拉格朗日中值定理：$\ln a-\ln b=f'(\xi)(a-b)$（$\xi\in(b,a)$）。

又 $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$，所以 $\ln a-\ln b=\frac{a-b}{\xi}$。

又 $\xi\in(b,a)$，所以 $\frac{1}{\xi}\in(\frac{1}{a},\frac{1}{b})$。

所以 $\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b}$，从而 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$，得证。

2.2.2 查找特定值

对于证明一种不等式，如果里面没有差式，也无法转换为差式，那么就可以考虑制造差式，对于 $f(x)$ 一般选择更高阶的，a 选择 x，b 要根据题目和不等式设置一个常数。

一般是 0 或 1。可以先尝试 1。

例题：当 $x>1$ 时，证明 $e^x>ex$。

证明：题目中没有差式，所以需要选择一个函数作为基准函数，里面有一个指数函数和一个幂函数，所以选择 e^x 作为基准函数。

然后选择一个常数作为 b 值，可以先选一个 1 作为 b 值：$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1)$。

从而 $e^x-e=e^{\xi}(x-1)$，$\xi\in(1,x)$，所以 $e^x-e>e(x-1)$，即 $e^x>ex$，得证。

2.3 柯西中值定理

需要找到两个函数，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$。

例题：设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

证明：由对数函数的特性可以知道 $\frac{b}{a}=\ln b-\ln a$，所以可以令 $F(x)=\ln x$，所以 $F'(x)=\frac{1}{x}$。

$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}=\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$。

根据柯西中值定理得证。

3　导数应用

3.1　单调性

例题：求 $y = x + |\sin 2x|$ 的单调区间。

解：因为函数的定义域为 R。

又 $y = \begin{cases} x + \sin 2x, & n\pi \leqslant x \leqslant n\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ x - \sin 2x, & n\pi + \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant (n+1)\pi \end{cases}$ （$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）。

$\therefore y' = \begin{cases} 1 + 2\cos 2x, & n\pi \leqslant x \leqslant n\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ 1 - 2\cos 2x, & n\pi + \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant (n+1)\pi \end{cases}$ （$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）。

令 $y' = 0$，所以得到驻点为 $x = n\pi + \dfrac{\pi}{3}$ 和 $x = n\pi + \dfrac{5\pi}{6}$。

分割区间：$\left[n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{3}\right]$，$\left[n\pi + \dfrac{\pi}{3}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left[n\pi + \dfrac{\pi}{2}, x = n\pi + \dfrac{5\pi}{6}\right]$，$\left[x = n\pi + \dfrac{5\pi}{6}, (n+1)\pi\right]$（$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）。

当 $x \in \left[n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{3}\right]$，$y' > 0$，所以函数在区间上单调递增。

当 $x \in \left[n\pi + \dfrac{\pi}{3}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$，$y' < 0$，所以函数在区间上单调递减。

当 $x \in \left[n\pi + \dfrac{\pi}{2}, x = n\pi + \dfrac{5\pi}{6}\right]$，$y' > 0$，所以函数在区间上单调递增。

当 $x \in \left[x = n\pi + \dfrac{5\pi}{6}, (n+1)\pi\right]$，$y' < 0$，所以函数在区间上单调递减。

从而函数在 $\left[\dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right]$ 时单调增加，在 $\left[\dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少（$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）。

3.2　凹凸性

二阶导数为 0 处就是拐点。

例题：决定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中参数，使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线，$(1, -10)$ 为拐点，且点 $(-2, 44)$ 在曲线上。

解：$y' = 3ax^2 + 2bx + c$，$y'' = 6ax + 2b$。

因为 $x = -2$ 处曲线有水平切线，即 $y'|_{x=-2} = 12a - 4b + c = 0$。

$(1, -10)$ 为拐点，代入：$y''|_{x=1} = 6a + 2b = 0$，$y|_{x=1} = a + b + c + d = -10$。

又点 $(-2, 44)$ 在曲线上，所以 $y|_{x=-2} = -8a + 4b - 2c + d = 44$。

解得四个方程：$a = 1$，$b = -3$，$c = -24$，$d = 16$。

3.3 极值与最值

求极值需要考虑 y' 与点两边正负号，如果 y'' 存在则可以考虑，$y''<0$ 则取极大值，$y''>0$ 则取极小值。

对于最值需要考虑极值和闭区间端点两个部分。

3.4 函数图像

3.5 零点问题

3.5.1 零点定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根。其中 ab 是具体数也可以是无穷大。

用于证明存在某一个零点。

3.5.2 单调性

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调（$f'(x)$ 存在且不恒等于 0），则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至多有一个根。

用于证明只有一个零点。

3.5.3 罗尔原话

若 $f^{(n)}(x)=0$ 至多有 k 个根，则 $f(x)=0$ 至多有 $k+n$ 个根。是罗尔定理的推论。

即若 $f(x)=0$ 至少有两个根，则 $f'(x)$ 至少有一个根。

例题：证明方程 $2^x-x^2=1$ 有且仅有 3 个实根。

解：令 $f(x)=2^x-x^2-1$，则 $f'(x)=\ln 2 2^x-2x$，$f''(x)=(\ln 2)^2 2^x-2$，$f'''(x)=(\ln 2)^3 2^x\neq 0$。

所以 $f'''(x)=0$ 至多 0 个根。所以根据罗尔原话 $f(x)=0$ 至多三个根。

又观察法 $f(0)=0$，$f(1)=0$ 得到两个实根。

$f(4)=-1$，$f(5)=6$，所以 $(4,5)$ 内存在一个实根，从而一共与三个根。

3.5.4 实系数奇次方程

实系数奇次方程至少与一个实根。即 $x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 至少与一个实根。

例题：若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0()$。

$A.$无实根　　$B.$有唯一实根　　$C.$有三个不同实根　　$D.$与五个不同实根

解：令 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，该实系数奇次方程至少有一个根。

$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$，令 $t=x^2$，$5t^2+6at+3b=0$。

$\Delta=36a^2-4\cdot5\cdot3b=36a^2-60b=12(3a^2-5b)<0$。

$\therefore f'(x)$ 无实根，所以 $t=x^2$ 解不出来，所以 $f'(x)\neq0$。

$f'(x)=0$ 至多 0 个根。所以根据罗尔原话 $f(x)=0$ 至多一个根，又由上面至少一个根，所以只有一个根，选择 B。

3.5.5 函数含参导数不含参

参数是一个加在式子上的常数，函数求导后参数就被消掉了，所以可以在计算过程中不考虑参数，等到了最后的结果再讨论参数。

例题：设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为 $()$。

$A.3$　　$B.2$　　$C.1$　　$D.0$

解：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}$，令其为 0，则 $x=e$。

$x\in(0,e)$，$f'(x)>0$，$f(x)\nearrow$，$x\in(e,+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)\searrow$。

又 $f(e)=k>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-\dfrac{x}{e}+k)=-\infty$，所以左边有一个根，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-\dfrac{x}{e}+k)=-\infty$，所以一共有两个根。

3.5.6 函数导数含参

参数与自变量进行运算，从而求导后参数仍在式子中，计算时需要携带参数来思考。

例题：求方程 $k\arctan x-x=0$ 的不同实根的个数，其中 k 为参数。

解：令 $f(x)=k\arctan x-x$ $\because f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是一个奇函数，所以可以只要考虑一边的情况。$x=0$ 是函数的一个根。

$f'(x)=\dfrac{k}{1+x^2}-1=\dfrac{k-1-x^2}{1+x^2}$。

若 $k-1\leqslant0$ 即 $k<1$ 则 $f'(x)\leqslant0$，所以 $f(x)$ 单调减少，从而只有一个根。

若 $k-1>0$ 即 $k>1$，令 $f'(x)=0$，即 $k-1-x^2=0$，$x=\sqrt{k-1}$。

$x \in (0, \sqrt{k-1})$，$f'(x) > 0$，$f(x) \nearrow$。$x \in (\sqrt{k-1}, +\infty)$，$f'(x) < 0$，$f(x) \searrow$。

$\lim\limits_{x \to +\infty} (k \arctan x - x) = -\infty$，所以在 0 的右侧一定存在一个零点，同理左边也因为奇函数对称存在一个零点，所以一共有三个根。